FORUM
FACHDIDAKTISCHE
FORSCHUNG

Schriftenreihe Fachdidaktische Forschung

Nr. 4, Dezember 2011

Benjamin Rott

Verunsicherungen und Zweifel beim Testen von Vermutungen bei der Bearbeitung elementargeometrischer Problemaufgaben

Key words:

Mathematikdidaktik, geometrische Problemaufgaben, Vermutungen, kognitiver Konflikt

Herausgeber der Schriftenreihe Fachdidaktische Forschung:

Peter Frei, Katrin Hauenschild, Irene Pieper, Barbara Schmidt-Thieme
Forum Fachdidaktische Forschung
Universität Hildesheim

Redaktion: Kati Buschmann, Stefanie Quedenfeld

ISSN 2193-5912

Verfügbar unter: http://www.uni-hildesheim.de/sff

Benjamin Rott

Verunsicherungen und Zweifel beim Testen von Vermutungen bei der Bearbeitung elementargeometrischer Problemaufgaben

Abstract

Bei der Bearbeitung mathematischer Problemaufgaben äußern Lernende Vermutungen und überprüfen diese. Beim Testen solcher Vermutungen können bei den Lernenden kognitiven Konflikten zwischen ihren Erwartungen und Beobachtungen entstehen, die wiederum zur Suche nach Erklärungen führen können. Der Beitrag beschäftigt sich mit der Frage, inwiefern bestimmte elementargeometrische Problemstellungen bei Lernenden Verunsicherungen und Beweisbedürfnis auszulösen in der Lage sind. Zur Beantwortung dieser Frage wurden die Videoaufzeichnungen von neun studentischen Teams bei der Arbeit an zwei Aufgaben ausgewertet. Das bei den zwei Aufgaben unterschiedliche Verhalten der Studierenden, was Anzeichen von Verunsicherungen anbelangt, wird durch verschiedene Arten von Vermutungen mit unterschiedlichen „Reichweiten“ gedeutet.

Working at mathematical problems, students formulate conjectures and test them. Testing conjectures can generate uncertainties and cognitive conflicts between their expectations and findings, that may lead to a search for explanations. This article deals with the question, in what way given geometry problems have the ability to inflict contradictions and the need for proof within learners. To answer this question, the videotapes of nine teams of university students, working on two task, are analyzed. The varying behavior of the students at those tasks concerning the signs of uncertainty, will be interpreted with different kinds of conjectures with different “reaches”.

1 Einführung

In modernen, konstruktivistischen Lerntheorien wird davon ausgegangen, dass Wissen kaum vermittelt werden kann; jeder Lernende muss sich sein Wissen durch aktive Auseinandersetzung mit dem Lerngegenstand selbst konstruieren (vgl. BLK 1997, S. 8; Woolfolk 2008, S. 426 ff.). Grundvoraussetzung hierfür sind entsprechend gestaltete Lernumgebungen. Für die Mathematik – in der Schule wie an der Universität – ist der mit Abstand häufigste Auslöser für mathematische Aktivität die Beschäftigung mit Aufgaben (vgl. Büchter & Leuders 1997, S. 7), wobei nicht jede Aufgabe gleich gut geeignet ist, Lernprozesse zu unterstützten. Vor allem *offene* und *Problemaufgaben* ermöglichen den Lernenden aktive Beschäftigung mit Mathematik (vgl. Hefendehl-Hebeker 2001, S.111 ff.; Zimmermann 2003, S. 43). Beispiele für Programme, mit denen die sog. „Neue Aufgabenkultur“ – weg von den herkömmlichen, inhaltlich und methodisch oft einseitigen, stark an Algorithmen orientieren Aufträgen – stärker in den Unterricht getragen werden soll, sind SINUS und SINUS-Transfer (BLK 1997, S. 84 ff.).

In solchen Lernarrangements, die eine aktive Beschäftigung – jenseits der bloßen Anwendung zuvor gelernter Schemata – mit dem Stoff zulassen, wird zugleich ein modernes Bild von der Mathematik vermittelt: als Wissenschaft, in der es nicht um das Auswendiglernen und sture Anwenden von (Rechen-) Regeln geht, sondern um

Problemlösen und Beweisen (vgl. Leuders 2003, S. 121; Schoenfeld 1994, S. 60 f.). Wichtiger Teil dieser Tätigkeiten – wenn Ziel und Lösungsweg anfangs nicht unbedingt klar sind (vgl. Dörner 1979) – ist das Aufstellen und Testen von Vermutungen.

Ein Bereich der Mathematik, der sich für Lernarrangements anbietet, in denen die Lernenden aktiv Probleme bearbeiten und dabei Vermutungen äußern und testen können, ist die Geometrie. Hier gibt es viele geeignete Problemstellungen und mit Dynamischer Geometrie-Software (DGS)[1] auch mögliche Hilfsmittel.

Genau darum geht es in diesem Artikel: um Vermutungen, mögliches Auftreten von Verunsicherungen und kognitiven Konflikten beim Überprüfen der Vermutungen und eventuell daraus erwachsende Motivation, weiter zu suchen – am Beispiel geometrischer Problemstellungen. Doch zunächst möchte ich die Studie, die Ausgangspunkt der hier vorgestellten Untersuchung[2] war, zusammenfassen:

1.1 Studie von Hadas & Hershkowitz

Hadas & Hershkowitz (2002) stellen ein Forschungsmodell vor, mit dem sie (geometrische) Aufgaben, die dazu geeignet sein sollen, in SchülerInnen (in diesem Fall Neuntklässlern) ein Beweisbedürfnis zu wecken, identifizieren und mit dem sie diese Auswahl anschließend überprüfen. Unter der Annahme, dass bei Lernenden ein Widerspruch zwischen deren Vermutungen und deren Beobachtungen zu Unsicherheiten und Zweifeln führt, die (nur) durch deduktive Erklärungsansätze, letztlich also Beweisaktivitäten, gelöst werden können, haben Hadas & Hershkowitz eine vierstufige Analyse entwickelt: Die ersten beiden Stufen sind theoretisch angelegt; a priori zeigen die Forscherinnen mögliche Herangehensweisen von Lernenden auf.

- Der erste Schritt ist das Erstellen einer Prognose über mögliche Vermutungen und die sich anschließenden Bearbeitungsschritte und Lösungswege bei der Arbeit an der Aufgabe. Diese „Pfade“ werden in einem Schaubild dargestellt.
- Im zweiten Schritt wird auf der Basis typischer Schüler-Vermutungen und (Fehl-) Vorstellungen versucht vorherzusagen, welche Herangehensweisen von SchülerInnen vermutlich gewählt werden.

Mithilfe dieser beiden Schritte findet eine Vorauswahl von Aufgaben statt, die geeignet erscheinen, kognitive Konflikte auszulösen. Die Stufen drei und vier der Aufgaben-analyse beruhen auf empirischen Daten und dienen der Überprüfung der Aufgabenauswahl auf Basis der ersten beiden Analyseschritte.

- Während des dritten Schritts werden die beobachteten Prozesse beschrieben, den Bearbeitungspfaden aus dem ersten Schritt zugeordnet und gezählt.
- Im letzten Schritt werden die Ergebnisse der Aufgabenbearbeitungen bewertet und je einer von fünf Erklärungskategorien[3] zugeordnet.

---

[1] DGS ist ein Sammelbegriff für Computerprogramme, die (1) einen Zugmodus besitzen, (2) die Erstellung von Makros als Sequenz von Konstruktionsbefehlen ermöglichen und (3) Bahnbewegungen von Punkten als Ortslinien darstellen können (vgl. Graumann et al. 1996, S. 197; Hölzl 1999, S. 9 ff.).

[2] Es handelt sich hierbei um (Teil-) Ergebnisse aus meiner 1. Examensarbeit (Rott 2005); die zugrundeliegenden Daten wurden teilweise neu ausgewertet und aufbereitet.

[3] Hadas & Hershkowitz verwenden die folgenden Kategorien: 1.) keine Erklärungsansätze; 2.) induktive

Die Autorinnen erläutern ihr Vorgehen an der folgenden Aufgabe, für deren Bearbeitung alle Probanden DGS zur Verfügung hatten:

> “Divide the side AC of a dynamic triangle into 3 equal segments. Connect the division points to the vertex B. Make conjectures about the 3 varying angles (<ABD, <DBE, and <EBS).
>
> Use the software to decide when (if ever) the three angles are equal. You may change your conjecture and check. Describe your investigation and explain your conclusion.” (Hadas & Hershkowitz 2002, S. 50)

In den ersten zwei Schritten haben Hadas & Hershkowitz drei mögliche Vermutungen herausgearbeitet und eingeschätzt: (1) die drei Winkel sind immer gleich groß; (2) die drei Winkel sind in bestimmten Fällen gleich groß und (3) die drei Winkel sind nie gleich groß. An diese Vermutungen, von denen die ersten beiden von SchülerInnen vermutlich eher geäußert werden als (3), schließen sich mögliche Bearbeitungspfade an. Für Vermutung (1) und (2) bestehen diese Pfade aus Sicht der Autorinnen aus Experimentieren und Messen, was zu Ergebnissen führen sollte, die im Widerspruch zur Vermutung stehen. Ein solcher Widerspruch führt dann zum Aufstellen einer neuen Vermutung, bis schließlich die dritte Vermutung geäußert wird und die Lernenden herauszufinden versuchen, weshalb die Winkel niemals gleich groß sein können.

Im dritten Analyseschritt wurden für die „Winkel-Aufgabe“ 35 Problemlöseprozesse ausgewertet. Wie vorhergesagt, hat kein Proband mit der dritten (korrekten) Vermutung begonnen; stattdessen verteilen sich deren Annahmen zu etwa gleichen Teilen auf Vermutung (1) und (2). Alle Lernenden haben im Verlauf der Bearbeitung, nach dem Messen der Winkel, die zweite Vermutung geäußert und bis auf ein Paar sind alle zu der Überzeugung gekommen, dass die drei Winkel nie gleich groß sind.

Im vierten Schritt, der Kategorisierung der Schülerergebnisse, halten Hadas & Hershkowitz fest, dass nur vier Paare keine Erklärung abgeliefert haben. 18 Teams haben deduktive oder teilweise deduktive Argumente zur Begründung verwendet und zwölf Lösungen wurden als induktiv kodiert. Die Autorinnen deuten dieses Ergebnis wie folgt: Die Aufgabenstellung wurde geschickt ausgewählt, denn alle Lernenden haben Vermutungen aufgestellt und überprüft und bei fast allen von ihnen konnte ein kognitiver Konflikt beobachtet werden, der etwa die Hälfte der SchülerInnen zum Begründen mit deduktiven Argumenten motivierte.

2 Theorie

Wie sich in der Einführung und der zusammengefassten Studie bereits angedeutet hat, geht es im Folgenden um *Vermutungen*, *kognitive Konflikte* und *Beweisbedürfnis*.

Erklärung; 3.) teilweise deduktive Erklärung; 4.) visuelle Variation als Erklärung; 5.) deduktive Erklärung.

2.1 Vermutungen

Der hohe Stellenwert von Vermutungen in der Mathematik ist unumstritten. Stellvertretend seien hier zwei die Mathematiker, die sich auch mit dem Weg zur mathematischen Erkenntnis auseinandergesetzt haben, Polya und Lakatos angeführt:

Polya (2009/1962) betont ausdrücklich die Wichtigkeit des Aufstellens von Vermutungen[4] im mathematischen Erkenntnisprozess. Das Lösen mathematischer Probleme sei im Wesentlichen bestimmt durch Beobachtungen und daraus erwachsende Entdeckungen, die ihrerseits in Generalisierungen und Vermutungen münden. Das Testen solcher Vermutungen – u.a. durch Spezial- und Extremfälle – sei ein unabdingbarer Schritt auf dem Weg zu einem Beweis. Zugespitzt schreibt er:

> „If you want a description of scientific method in three syllables, I propose: GUESS AND TEST.“ (ebd., S. 157)

Ein fiktives Klassengespräch über die Euler'sche Polyederformel präsentiert Lakatos (1976) in dem Klassiker „Proofs and Refutations“; dabei zeichnet er den Erkenntnisweg vom Beobachten über das Aufstellen, Testen und Verwerfen von Vermutungen bis zu ihrem Beweis nach. Auch er hebt hervor, wie wichtig Vermutungen für diesen Prozess sind, und bezieht sich dabei neben Polya (s.o.) auf Poppers Kritischen Rationalismus.

Der Themenbereich „Vermutungen“ ist natürlich nicht nur in der mathematischen, sondern auch in der mathematikdidaktischen Diskussion vertreten: Wie wichtig das Äußern von Vermutungen – in Verbindung mit Testen, Widerlegen und Generalisieren – für mathematisches Argumentieren und Begründen ist, stellt Reid (2002) heraus; dabei verweist er u.a. auch auf Polya und Lakatos. Ähnlich sehen es Mason, Burton & Stacey (2006), die in ihrem Buch „Mathematisch denken“[5] mehrfach hervorheben, „die zentralen mathematischen Techniken bestehen in der Formulierung von Vermutungen und im Führen von Beweisen“ (ebd., S. 40) bzw. „Das Aufstellen von Vermutungen ist [...] einer der Hauptbestandteile der mathematischen Arbeit.“ (ebd., S. 67) Schließlich stellen auch Mason & Johnston-Wilder (2004, S. 139 ff.) die hohe Relevanz von Vermutungen und (Lern-) Umgebungen, die das Äußern von ihnen zulassen, heraus:

> "Participating in a conjecturing atmosphere in which everyone is encouraged to construct extreme and paradigmatic examples, and to try to find counter-examples [...] involves learners in thinking and constructing actively. [...]" (ebd., S. 142)

Was ist aber nun das „Aufstellen von Vermutungen“? Reid & Knipping (2010) konkretisieren diesen Begriff in ihrem Abschnitt über das induktive Argumentieren; diese Definition soll grundlegend für die hier vorgestellte Arbeit sein:

> „We will use the word *conjecturing* to refer to making a general statement from specific cases when the general statement requires additional verification [...]. Conjecturing addresses a need to explore.“ (ebd., S. 92)

[4] Er verwendet die Begriff *conjecture* und *guess* dabei synonym.
[5] Vermutlich noch bekannter unter dem alten Titel: "Hexeneinmaleins: kreativ mathematisch denken"

2.2 Kognitiver Konflikt und Verunsicherungen

Das Aufstellen und Testen von Vermutungen beim Beweisen oder Problemlösen führt in der Regel dazu, dass auch immer wieder Vermutungen verworfen werden (müssen). Die Erkenntnis, dass eine zuvor geäußerte (für wahr gehaltene) Vermutung falsch ist, kann bei Lernenden Überraschung oder Verunsicherung auslösen. Dieser Zustand der Unsicherheit wird als „kognitiver Konflikt" bezeichnet – ein Begriff, der entscheidend von Jean Piaget geprägt wurde; er soll im Folgenden ein wenig beleuchtet werden.

Nach der Piaget'schen Äquilibrationstheorie lassen sich Lernprozesse durch *Assimilation* und *Akkomodation* beschreiben: *Assimilation* steht dabei für die (reine) Aufnahme von Informationen, die bereits vorhandenen (kognitiven) Schemata untergeordnet werden. Kann eine Information nicht ohne Weiteres aufgenommen werden, kommt es zu einer Störung bzw. einem *kognitiven Konflikt*, der zu teilweise heftigen emotionalen Reaktionen führen kann. Der kognitive Konflikt kann nun eine Anpassung bzw. Veränderung der Schemata auslösen, was als *Akkomodation* beschrieben wird und den eigentlichen Lernprozess beschreibt. Ziel dieser Prozesse ist dabei stets die Herstellung eines Gleichgewichtszustands (*Äquilibration*) (vgl. Piaget 1972; Wittmann 1981, S. 61 ff.; Adey & Shayer 1994, S. 63 f.). Für die Bearbeitung mathematischer Aufgaben schreibt Wittmann (1981) zur Äquilibrationstheorie:

> „Bei der Adaption kommt es in der Regel zu einem Zusammenspiel zwischen Assimilation und Akkomodation: Es sei ein Problem gegeben; das Individuum versucht zu einer Lösung zu kommen, sowohl dadurch, daß es verschiedene Schemata durchprobiert (Akkomodation), als auch dadurch, daß es die Aufgabe umformuliert, um sie einem gegebenen Schema zugänglich zu machen (Assimilation). Strategien letzterer Art werden in der Heuristik behandelt." (ebd., S. 65)

Dass ein kognitiver Konflikt nicht nur ein (notwendiger) Schritt beim Lernen ist, sondern darüber hinaus auch motivierende Wirkung haben kann, wird mehrfach beschrieben. Mason, Burton & Stacey (2006) schreiben beispielsweise als Kommentar zu einer unerwarteten mathematischen Entdeckung, dass „gerade dieses Gefühl der Überraschung [...] der Motor für die weitere Vorgehensweise [ist]." (ebd., S. 2).

Kircher, Girwidz & Häußler (2000, S. 191) raten in ihren Ausführungen zur Planung von Unterricht, bei Schülern bewusst kognitive Konflikte zu erzeugen, da es insb. mithilfe solcher Konflikte gelinge, deren Interesse zu wecken. Sie beziehen sich dabei auf den amerikanischen Psychologen Berlyne: Ein kognitiver Konflikt entstehe, wenn das Wahrgenommene mit dem bisherigen Wissen, den bisherigen Erfahrungen nicht übereinstimme. Die Wahrnehmung werde dann als ungewöhnlich oder überraschend empfunden. Die motivationserzeugende Wirkung eines solchen Konflikts äußere sich darin, dass Schüler zur Klärung der Situation angeregt würden, nach Informationen zu suchen. Mit zunehmender Stärke des Konflikts steige zunächst auch die Suche an, bis sie wieder abnehme und schließlich ins Negative umschlage, wenn der Konflikt zu stark ist, was einer Weigerung nach weiterer Informationssuche und Beschäftigung mit dem Thema gleichkomme. Woolfolk (2008, S. 426 ff.) gibt ähnliche Hinweise für Lehrer, Schüler nach Vorstellung eines verwirrenden Ereignisses oder eines Problems zur Formulierung von Hypothesen anzuregen. Diese Hypothesen sollten anschließend überprüft und daraus Rückschlüsse auf das ursprüngliche Problem gezogen werden.

Blömeke et al. (2006) stellen in ihrem „Modell zur Analyse der Qualität von Aufgaben im [Mathematik-] Unterricht“ (S. 1) als zweites von neun Merkmalen heraus:

> „Eine Aufgabe muss ein *Bedürfnis* der Schülerinnen und Schüler ansprechen. Durch eine Aufgabe kann das Gefühl der Unsicherheit bzw. ein „kognitiver Konflikt“ ausgelöst und das Bedürfnis nach Stabilität und Struktur bzw. Lösung des kognitiven Konflikts und Abbau der provozierten Unsicherheit angeregt werden.“ (ebd., S. 6, Hervorhebung wie im Original)

Natürlich gibt es mehrere empirische Untersuchungen, die sich mit Verwunderungen, Verunsicherungen und kognitiven Konflikten bei Lernern auseinander gesetzt haben: Spiegel, Ernst & Schmelter (1999) schildern an einem ausgewählten Fallbeispiel, wie bestimmte Aufgaben bei Kindern des 1. und 2. Schuljahres kognitive Konflikte auslösen, wie die Kinder damit umgehen und wie Piagets Theorie bei der Deutung der beobachteten Prozesse hilft. Stein (1999) konfrontiert Schüler verschiedener Altersstufen mit Puzzle- und Arithmetik-Aufgaben, die – entgegen den Erwartungen der Lernenden – unlösbar sind. Aufgaben dieser Art seien u.a. aus „*didaktischer* Sicht interessant, weil sie vielfältigen Anlaß zum Aufstellen von Vermutungen und zum Argumentieren bieten.“ (ebd., S. 4 f.) Hadas & Hershkowitz (1998, 2002) haben bei der Bearbeitung von Geometrieaufgaben in DGS-Umgebung[6] gezeigt, dass Lernende ein Bedürfnis nach Erklärungen zeigen, wenn sie Überraschungen erleben und Widersprüche zwischen ihren Vermutungen und ihren Beobachtungen aufdecken.

> „The need for explanations was raised by:
>
> - a surprise caused by the contradiction between the conjectures and what students got (or could not get) [...].
> - a situation where one can not find any example for a conjecture [...].
> - the multiple representations of the situation (geometrical, numerical and graphical).“ (Hadas & Hershkowitz 1998, S. 32)

Was aber macht einen kognitiven Konflikt aus? Wie stellt man ihn fest? Wie gesagt handelt es sich dabei um interne Vorgänge, wie Adey & Shayer (1994) hervorheben:

> All perceptions are interpreted through the learners' present conceptual framework. Where current conceptualisation fails to make sense of an experience, cognitive conflict can lead to constructive mental work by students to accomodate their conceptual framework to the new type of thinking necessary. Cognitive conflict is a feature both of Piaget's account of the impact of environmental stimulus and children's constructivist response on cognitive growth, and of cognitive acceleration programmes which are effective in raising levels of thinking.” (ebd., S. 62 f.)

Mentale Prozesse entziehen sich der Beobachtung, deshalb sollen hier als Anzeichen für kognitive Konflikte die oben beschriebenen Reaktionen dienen: Aussagen und Verhaltensweisen, die auf Überraschung und Verunsicherung hindeuten.

[6] Unter anderem mit der oben geschilderten „Winkel-Aufgabe“.

2.3 Beweisbedürfnis

Das Beweisen ist ein zentraler Bestandteil der Mathematik; neben ihrer verifizierenden Funktion können Beweise u.a. auch erklärende oder entdeckende Funktionen ausüben (vgl. De Villiers 1990, S. 18). Trotz dieser Wichtigkeit und obwohl es nach den Bildungsstandards zum Unterrichtskanon gehören sollte, spielt das Beweisen im derzeitigen Unterricht eher eine untergeordnete Rolle (Tietze, Klika & Wolpers 2000, S. 165). Dies liegt zum Teil wohl daran, dass es sich beim Beweisen um eine Tätigkeit handelt, die Schülern unheimlich schwer fällt und für die sie wenig Verständnis aufbringen (vgl. Winter 1983; Krauthausen 2001).

Verschiedene Autoren (u.a. Hefendehl-Hebeker 2003, S. 103 f.; Tietze, Klika & Wolpers 2000, S. 170 ff.; Krauthausen 2001, S. 103 ff.) plädieren dafür, dem Beweisen im Mathematikunterricht einen größeren Stellenwert einzuräumen – allerdings ohne dabei die formalen Aspekte zu sehr zu betonen. Als besonders wichtig wird bei allen Autoren hervorgehoben, „die *Notwendigkeit eines Beweises* deutlich zu machen.“ (Tietze, Klika & Wolpers 2000, S. 170); es geht also um die „Förderung einer entsprechenden Einstellung“ (ebd.) bzw. um intrinsische Beweismotivation. Insgesamt gelingt es bisher aber zu wenig, eine solche Motivation bei SchülerInnen zu erzeugen. Ludwig fasst Forschungsergebnisse (vgl. Winter 1983) für die Geometrie passend zusammen:

> „Schüler der Sekundarstufe I empfinden **in der Regel kein Beweisbedürfnis**. In allen Untersuchungen treten Defizite zu Tage, die ein fehlendes Bewusstsein bezüglich der Tätigkeit des Beweisens und des Sinns von Beweisen betreffen. Für Schüler genügt meistens das Nachmessen oder Überprüfen anhand einer Zeichnung als "Beweis". Die Motivation zum Beweisen ist demnach eines der großen Probleme im Geometrieunterricht.“ (Ludwig o.J., S. 4; Hervorhebung wie im Original)

Als *Beweisbedürfnis* sollen hier Aussagen verstanden werden, die die „Frage nach dem 'Warum' [an]stoßen“ (Hefendehl-Hebeker 2003, S. 103); also Äußerungen, die die Suche nach einer Begründung initiieren.

3 Beschreibung der Begleitforschung

Die vorliegenden Daten wurden im Rahmen einer Begleitforschung zur Vorlesung „Elementargeometrie“ im Sommersemester 2004 an der Universität Oldenburg erhoben. An dieser Veranstaltung nahmen etwa 350 Studierende des Grund-, Haupt- und Realschullehramts teil, die auf acht Übungsgruppen, „Tutorien“, aufgeteilt wurden. In den wöchentlich stattfindenden, zweistündigen Übungen war eine Stunde für die Bearbeitung sogenannter Präsenzaufgaben in Dreier- oder Vierergruppen vorgesehen. Die Präsenzaufgaben zeichneten sich durch ihren – im Vergleich zu den Heimübungen – deutlich erhöhten Schwierigkeitsgrad aus (vgl. Knipping 2005, S. 304). Die Lernenden konnten durch Abgabe ihrer diesbezüglichen Ausarbeitungen Bonuspunkte für die Klausur am Ende des Semesters erlangen; eine Möglichkeit, die alle Studierenden nutzten. In allen Übungsgruppen waren studentische Tutoren anwesend, die den Gruppen – insb. kurz vor Ende der vorgesehenen Bearbeitungszeit – Tipps und Hilfestellungen gaben, damit alle Studierenden Bonuspunkte erhalten konnten.

Vier der acht Tutorien waren in das Forschungsprojekt eingebunden; die Arbeit an den Präsenzaufgaben wurde gefilmt. Die Studierenden in zwei der Begleitforschungs-Tutorien haben an Laptops mit dynamischer Geometriesoftware (Cabri Geometre, vgl. Bellemain & Laborde 1994) gearbeitet; die Kürzel dieser Gruppen beginnen mit „Ulap2" bzw. „Ulap4". Die Probanden aus den anderen beiden Tutorien haben herkömmliche Mittel (Papier, Stift, Lineal, Zirkel) verwendet; ihre Kürzel beginnen mit „U1" bzw. „U3"[7] Aus jedem Tutorium wurden zwei Gruppen ausgewählt, deren Bearbeitungsprozesse auf Video aufgenommen wurden. Das Team Ulap4TV hat sich in zwei unabhängig voneinander arbeitende Paare („A" und „B") geteilt, so dass im Folgenden neun Teams betrachtet werden: je zwei aus U1, U3 und Ulap2, sowie drei aus Ulap4.

Die erhobenen Daten bestehen aus den Videos der Präsenzaufgaben-Bearbeitungen, den zugehörigen Produkten der Studierenden, den „Cabri-Aufzeichnungen" sowie von Hilfskräften angefertigte Beobachtungsprotokolle (vgl. Knipping 2005, S. 305).

3.1 Die Aufgaben

Von den fünf Präsenzaufgaben des Semesters habe ich zwei ausgewählt, deren Bearbeitungen durch die Studierenden ich in diesem Artikel untersuche. Bei beiden Aufgaben geht es um die Minimierung von Streckenlängen. Ihr genauer Wortlaut und je eine mögliche Lösung werden im Folgenden dargeboten, ausführliche Analysen dieser Aufgaben finden sich in Rott (2005, Kap. 4). Zu den übrigen Präsenzaufgaben und weiteren Problemaufgaben wird es ein paar Kommentare in der Diskussion geben.

Der kürzeste Umweg

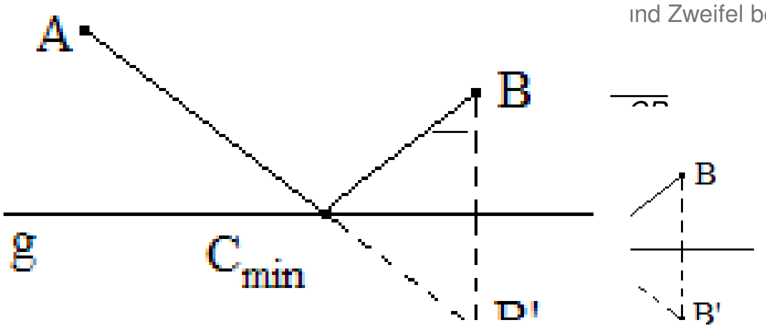
Gegeben sei eine Gerade g und zwei Punkte A und B außerhalb der Geraden. Sei C ein beliebiger Punkt auf g, d.h. C ist auf g frei wählbar bzw. kann auf g verschoben werden.

Gesucht ist der kürzeste Umweg von A über C nach B. An welcher Stelle C_{min} der Geraden g ist der Weg minimal? Beschreiben Sie, wie man den Punkt C_{min} exakt konstruieren kann! Warum ist der Weg über C_{min} dann minimal?

Lässt man Spezial- und Extremfälle wie $A = B$ oder $A \vee B \in g$ (die teilweise durch die Aufgabenstellung ausgeschlossen werden) weg, zerfällt die Aufgabe in zwei Fälle:

- A und B auf verschiedenen Seiten der Geraden g,
- A und B auf derselben Seite der Geraden g.

[7] Die Buchstaben dieser Kürzeln stehen für "**U**ebung" 1 – 4, das "lap" bezeichnet „Laptop"-Gruppen



ɔdann minimal, wenn C_{min}
t (Dreiecksungleichung).
nan den Punkt *B* an der
ʒ' so, dass *A* und *B*' auf
st sich nun wegen der
ickführen (s. Abb. 1).

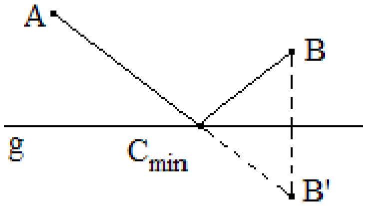


Abb. 1: Spiegel-Lösung zu „Der kürzeste Umweg“

Weiteres zu dieser Aufgabe findet sich u.a. in Deulofeu & Figueiras (2005); Engelhaupt (2004); Jahnke (1998); Specht (2001) sowie Winter (1989).

Drei-Strände-Problem

Einer Schiffbrüchigen gelingt es, sich auf eine verlassene Insel zu retten. Diese Insel hat, wie der Zufall es will, die Form eines gleichseitigen Dreiecks. Sie entdeckt schnell, dass es an allen drei Stränden der Insel (den Seiten des Dreiecks) wunderbare Möglichkeiten gibt zu surfen. Die Schiffbrüchige baut sich aus einem Baum ein Surfbrett und surft jeden Tag.

a) Wo sollte sie ihr Haus bauen, so dass die Entfernung von ihrem Haus zu jedem der drei Strände gleich ist?

b) Wo sollte sie ihr Haus bauen, so dass die Summe der Entfernungen von ihrem Haus zu allen drei Stränden minimal ist? (Sie surft an allen drei Stränden gleich häufig.)

Bevor Sie genauere Überlegungen anstellen, zeichnen Sie den Punkt ein, von dem Sie denken, dass es der günstigste Ort für das geplante Haus der Schiffbrüchigen ist. Suchen Sie dann nach einer überlegten Lösung. Begründen Sie jeweils Ihre Lösung!

Der Aufgabenteil b) basiert auf einem Satz von Vincenzo Viviani (1622 – 1703). Der Satz besagt, dass in jedem gleichseitigen Dreieck die Abstandssumme eines Punktes zu den Seiten des Dreiecks immer gleich groß ist. Diese Behauptung, dass die Abstandssumme für alle Punkte im Dreieck und auf dessen Rand gleich groß – also so groß wie die Höhe *h* des Dreiecks – ist, lässt sich auf verschiedene Arten beweisen; zum Beispiel über die Betrachtung von Flächeninhalten:

Sei P ein Punkt im Inneren des gleichseitigen Dreiecks ΔABC mit der Höhe h. Dann lässt sich ΔABC durch P in die drei Teildreiecke ΔABP, ΔPBC und ΔCAP zerlegen, wobei die Abstände d_a, d_b, d_c des Punktes P zu den Seiten von ΔABC genau die Höhen der jeweiligen Teildreiecke sind (vgl. Abb. 2).

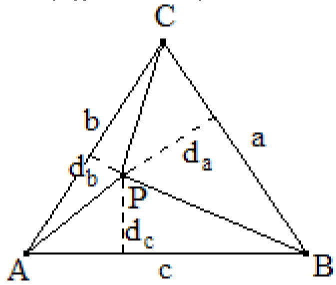


Abb. 2: Das „Drei-Strände-Problem“

Da die Fläche der drei Teildreiecke gleich der Fläche des Dreiecks ΔABC ist, folgt (mit $||AB||$ als Länge der Dreiecksseiten):

$$A_{\Delta ABC} = A_{\Delta ABP} + A_{\Delta PBC} + A_{\Delta CAP}$$

$$\Leftrightarrow \; ½\, ||AB||\, h = ½\, ||AB||\, (d_a + d_b + d_c)$$

$$\Leftrightarrow \; h = d_a + d_b + d_c$$

Liegt der Punkt P auf einer Seite des Dreiecks ΔABC, dann ist der Abstand zu der entsprechenden Seite Null. Es ergeben sich nur zwei Teildreiecke, die Argumentation verläuft analog. Liegt P auf einem der Eckpunkte, so ist nichts mehr zu zeigen. Diese Aufgabe wird u.a. in den folgenden Publikationen diskutiert: De Villiers (2000); Hölzl (1999); Tietze, Klika & Wolpers (2000).

Bei beiden Aufgaben sollte es sich für durchschnittliche Studierende nicht um Routine-, sondern um Problemaufgaben handeln (vgl. Dörner 1979, S. 10 ff.). Diese Einschätzung konnte anhand der beobachteten Prozesse bestätigt werden, wie die folgenden Analysen zeigen – keines der gefilmten Teams hatte von Anfang an einen Algorithmus zur Hand, mit dem sie eine der Aufgaben direkt lösen konnte.

4 Forschungsfragen

Anders als Hadas & Hershkowitz (2002), die sich auf die Argumentationen (induktiv, visuell, deduktiv) der SchülerInnen konzentrierten, richte ich das Augenmerk stärker auf die geäußerten Vermutungen sowie auf die Frage, ob / wann durch Verunsicherungen ein Begründungs- oder Beweisbedürfnis bei den Studenten geweckt werden kann. Gerade letzteres ist von besonderem Interesse, da es noch zu wenig gelingt, Lernende zum Beweisen zu motivieren. Die Frage nach der Art der Argumentation ist ebenfalls spannend, im vorliegenden Setting – wegen der Einflussnahme der Tutoren auf die Begründungen der Studierenden – aber nicht eindeutig zu untersuchen. Konkret geht es um folgende Fragestellungen:

- Zeigen die Studierenden exploratives Verhalten der Form „Vermutung aufstellen – Vermutung überprüfen“? Und, im vorliegenden Fall, welche

Vermutungen werden bei der Bearbeitung der ausgewählten Aufgaben geäußert?

- Lassen sich in den Bearbeitungsprozessen Anzeichen für Verunsicherungen erkennen? Wie viele und hängen sie mit widerlegten Vermutungen zusammen?
- Kommt es durch solche Verunsicherungen – wenn vorhanden – zu (vermehrtem) Beweisbedürfnis? 4.3 „Sie können sagen, was Sie wollen, Sie bleiben einfach ein Weib!“

5 Methode

Wie Hadas & Hershkowitz (2002) und Reid (2002) habe ich Videos von in Gruppen arbeitenden Problemlösern ausgewertet. Ausgehend vom Videomaterial wurden von den Prozessen zunächst ausführliche Protokolle und Beschreibungen in Textform angefertigt. Anhand dieser Verschriftlichungen und der Videos wurden dann „spannende“ Stellen ausgewählt, die für die nähere Untersuchung transkribiert wurden.

Die Identifikation solcher Stellen erfolgte, um eine möglichst hohe Objektivität gewährleisten zu können, im Interpreten-Team. Wie z.B. bei Heinrich (2004, S. 202) waren an der Sichtung der Videos mehrere Forscher beteiligt, die Entscheidungen wurden *konsensuell validiert* (vgl. Maier 1991).

Die Kodierung von „Vermutungen“, „Verunsicherungen“ und „Beweisbedürfnis“ soll im Folgenden an Transkript-Beispielen illustriert werden, wobei für diesen Teil ein Team mit (Ulap4A) und eines ohne Computerunterstützung (U1C) ausgewählt wurden:

5.1 Vermutungen

„Vermutungen“ sind Aussagen über (mögliche) Lösungen der Aufgabe, die einer Überprüfung bedürfen. Das erste Beispiel stammt vom Team U1C bei der Bearbeitung des Drei-Strände-Problems; die drei Studentinnen hatten zunächst sie angenommen, die Abstandssumme sei minimal im Inkreismittelpunkt, und anschließend vermutet, das Minimum dieser Summe werde in den Eckpunkten angenommen:[8]

19:40	Tanja	Ja, sogar das ist gleich! Ich hab jetzt mal so nen Punkt auf der Winkelhalbierenden genommen. Und wenn du dann diese Strecken addierst mit dieser, kommst du auch wieder auf diese drei Komma fünf.
19:49	Gitta	Echt? *[setzt einen Punkt in ihre Zeichnung]* (..) Aber nur, wenn es senkrecht zum Strand ist, oder?
19:59	Tanja	Senk, ja, genau, senkrecht zum Strand.
		Gitta und Bärbel messen.
20:10	Gitta	Stimmt
20:14	Tanja	Hat sie noch (ein Mittel)?
20:16	Gitta	Das heißt ja, dann muss sie einfach nur irgendwo auf einer der Winkelhalbierenden bauen, das ist#

[8] 8 Alle Namen wurden anonymisiert, die verwendeten Transkriptionsregeln finden sich im Anhang.

20:24	Tanja	#Ja, wenn ich jetzt hierhin bauen würde, ich geh mal von diesen Winkelhalbierenden weg. *[setzt einen Punkt in die Zeichnung]* (...) hier, das Haus, ein Zentimeter. (...) Hmm, ja das ist ja mehr.
20:49	Gitta	Ist mehr?
20:50	Tanja	Ja
[...]		
21:59	Bärbel	wenn du dein Haus genau auf so ne
22:03	Tanja	Schnittpunkt von der Winkelhalbierenden
22:04	Bärbel	genau
22:04	Tanja	mit ner Strecke
22:04	Gitta	Was ist dann?
22:05	Tanja	kommt genau das gleiche wieder raus
22:06	Gitta	Wie, genau das gleiche?
22:08	Tanja	ja, wieder unser, bei mir drei Komma vier, drei Komma fünf
22:11	Gitta	Ja, ist ja auch klar, hab ich ja, haben wir doch eben schon gehabt.
22:13	Tanja	ja
22:13	Gitta	immer, wenn ich das auf einer dieser Strecken baue *[zeigt auf Bärbels Skizze]*
22:18	Tanja	*[nickt]* aber wir haben ja nur die Strecken, wir ham ja nur die Strecken
22:21	Gitta	ja, das ist ja auch alles in einem
22:24	Tanja	das stimmt schon *[nickt]*
22:28	Gitta	ja, also ist es egal wo
22:32	Tanja	ja
22:33	Bärbel	kommt überall dasselbe raus
22:35	Gitta	ja, haha (..) du musst halt auf einer von diesen *[zeigt auf die Skizze]*
22:40	Bärbel	Winkel(halbierenden)
22:41	Gitta	und darf nicht irgendwo sein. Wenn ich die jetzt beispielsweise hierhin setze#
22:44	Bärbel	#ist es mehr
22:45	Tanja	#mehr, das muss nur auf den Winkelhalbierenden sein
22:55	Gitta	ja *[liest leise die Aufgabenstellung]*

Dieser etwas längere Abschnitt wurde kodiert als „Abstandssumme minimal in allen Punkten der Winkelhalbierenden“. Diese Vermutung wurde so oder ähnlich neben U1C auch von den Teams U3TV und Ulap2A formuliert (wobei letztere Gruppe hinzufügt, die Winkelhalbierenden im gleichseitigen Dreieck seien zugleich die Mittel-senkrechten).

Beispiel zwei stammt vom Team Ulap4A, ebenfalls bei der Arbeit am Strände-Problem. Nachdem die Gruppe zunächst Schwierigkeiten mit dem Konzept „Abstand eines Punktes von einer Dreiecksseite“ hatte, konnte die Berechnung der Abstandssumme mithilfe der DGS realisiert werden. Der Transkriptteil beginnt, kurz nachdem Anja zum ersten Mal an dem Punkt gezogen hat, der das Haus der Schiffbrüchigen darstellt:

15:11	Anja	ah, das ist ja interessant
15:13	Jan	in einem Punkt, drin?
15:14	Anja	ist immer, es ist ganz egal wo auf der Insel
[...]		
16:25	Doro	ähm, was ist denn, wenn wir auf einfach auf ner Seite drauf sind?
16:28	Anja	das geht, aber es geht halt bis zu der Seite
16:30	Doro	bis genau die Seite, ja?
16:32	Anja	und in dem Moment, wo man über die Seite geht
16:34	Doro	ja, deswegen, du hattest vorhin dabei so ein bisschen gezittert
16:35	Anja	mhm *[zustimmend] [lacht]*
16:38	Bea	da konnte man das nicht so richtig erkennen

Für das Team wurde an dieser Stelle die Vermutung „Abstandssumme für alle Punkte gleich groß“ kodiert, die letztendlich von allen neun Teams geäußert wurde.

5.2 Verunsicherungen

Anzumerken ist an dieser Stelle, dass es sich bei Verunsicherungen um kognitive Prozesse handelt, die noch stärker als Vermutungen einer Interpretation unterliegen. Für die Teams wurden „Verunsicherungen“ kodiert, wenn Anzeichen dafür bei mindestens einem Gruppenmitglied identifiziert werden konnten. Das erste Beispiel stammt wieder vom Team U1C, Strände-Problem. Die drei Studentinnen hatten vor Beginn der hier ausgewählten Stelle die Vermutung geäußert, die Abstandssumme sei minimal in den Eckpunkten des gleichseitigen Dreiecks und diese Vermutung überprüft:

18:44	Tanja	Und dann haben wir jetzt festgestellt, dass gleich lang
18:47	Gitta	Kann das sein, dass es so war?
18:50	Bärbel	mhh *[zustimmend]*
18:50	Tanja	mhh *[zustimmend]* kommt hier auch sehr gut hin (..) also ist es nicht mehr kürzer, genau gleich.
19:00	Gitta	ja
19:02	Tanja	also bringt es uns nichts.
19:02	Gitta	häh?
19:03	Tanja	also ist doch
19:04	Gitta	dann gibt’s wahrscheinlich noch nen anderen Punkt
19:07	Bärbel	obwohl
19:11	Gitta	och Mann!
19:12	Bärbel	ist doch doof
19:14	Gitta	aber ich weiß es auch nicht genau.

Die Äußerungen von Gitta („och Mann!“) und Bärbel („ist doch doof“) wurden hier als Zeichen einer Verunsicherung interpretiert.

Der zweite Transkriptausschnitt ist dem Prozess des Teams Ulap4A (Strände-Problem) entnommen. Es handelt sich um einen Teil der oben erwähnten Stelle, an der die Studierenden Schwierigkeiten mit dem Abstandsbegriff zeigten:

08:12	Jan *(unverständlich)*	ich glaube, das hab ich noch nicht ganz verstanden
08:14	Anja	ich glaube, dass das ne, ne (.) ich glaub das ist noch nicht
08:18	Jan	wahrscheinlich übersehen wir da irgendwas
08:24	Bea	*[liest leise] (unverständlich)* Sie den Punkt ein, von dem sie denken
08:26	Jan	weil das sind ja die Senkrechten auch, ne? Da
08:28	Anja	würde hinkommen
08:36	Doro	Sag mal, sind wir jetzt blöd, oder?

Die Teammitglieder sind sich nicht sicher, wie man den Abstand eines Punktes zu einer Strecke misst, die Unsicherheit wird von Doro ausgedrückt („sind wir jetzt blöd, oder?“).

Es folgt eine zweite Stelle, bei der eine Verunsicherung kodiert wurde, aus dem Prozess von Ulap4A (Strände). Die Lernenden haben gerade die Messung der Abstandssumme konstruiert und ziehen nun an dem Punkt im Inneren des Dreiecks:

		Anja bedient den Rechner und sortiert die Messergebnisse
14:47	Jan	Es muss doch jetzt einen Punkt geben
14:48	Bea	der weniger ist, ja, stimmt
14:50	Anja	sehr merkwürdig, genau so groß
14:52	Doro	aha, also ist äh wahrscheinlich, mach mal weg
14:56	Jan	Schiebung!
14:57	Doro	mach mal weg
14:57	Bea	*[lacht]*
15:00	Anja	Jetzt bewegen wir doch mal
15:01	Bea	H Strich
		Alle starren gebannt auf den Bildschirm
15:04	Doro	*(unverständlich)*
15:04	Anja	der verändert sich nicht
15:05	Doro	jetzt geh mal, geh mal aufs Meer raus
15:07	Anja	hab ich die falschen Zahlen genommen?
15:08	Bea	geh doch mal aus'm Haus raus
15:09	Doro	Ne, es darf nur nicht auf dem Meer sein
15:11	Anja	Ah, das ist ja interessant

Die Unsicherheit wird hier unter anderem von Jan („Schiebung!“) und Anja („hab ich die falschen Zahlen genommen?“) ausgedrückt; gerade Anja zweifelt eher an ihrer

Konstruktion als an den Messergebnissen. Direkt im Anschluss wird die Vermutung geäußert, die weiter oben bereits als Beispiel angeführt wurde.

5.3 Beweisbedürfnis

Wie die Anzeichen von Verunsicherung ist auch ein „Bedürfnis" nach Beweisen oder Argumentationen in den Prozessen das Ergebnis einer Interpretation. Alle Äußerungen der Art „wir müssen das begründen" wurden als Beweisbedürfnis kodiert, ohne zunächst zu unterscheiden, ob dieses Bedürfnis intrinsisch („wir wollen wissen, warum das so ist") oder extrinsisch („uns wurde gesagt, dass wir das begründen sollen") motiviert ist. Beispiel eins stammt vom Team U1C (Strände), die Studentinnen gehen davon aus, alle Punkte der Winkelhalbierenden gehören zur Lösungsmenge (s.o.):

24:28	Gitta	ja
24:30	Tanja	jetzt müssen wir das noch begründen
		Tanja und Bärbel schreiben, Gitta schaut auf ihr Blatt, ab 25:20 beginnt sie, etwas in ihre Skizze zu zeichnen und zu messen.
25:30	Bärbel	was machst du jetzt?
25:31	Tanja	ich zeichne hier noch mal was ein.

Tanja äußert explizit, dass das Team nun noch eine Begründung finden müsse; dieses „Beweisbedürfnis" scheint eher extrinsisch motiviert zu sein.

Das letzte Beispiel stammt einmal mehr vom Team Ulap4A (Strände). Die Studierenden haben die richtige Vermutung geäußert (s.o.) und empirisch überprüft:

16:41	Anja	das ging ja wirklich schnell
16:44	Bea	Ja, ich mein
16:44	Anja	jetzt kommt noch der Klopser, wahrscheinlich
16:46	Bea	die Begründung

Auch dieser Wortwechsel von Anja und Bea scheint eher extrinsisch als intrinsisch motiviert zu sein (aber immerhin ist ein Bewusstsein dafür vorhanden, dass die geäußerte Behauptung zu beweisen ist). Weitere Bespiele für Vermutungen, Verunsicherungen und Beweisbedürfnis folgen in den nächsten Abschnitten.

6 Beobachtungsergebnisse

Im Folgenden werden die Videoauswertungen präsentiert. Für die Umweg- und die Strände-Aufgabe gibt es jeweils einen Abschnitt, in dem die geäußerten Vermutungen sowie die identifizierten Stellen mit Verunsicherungen und Beweisbedürfnissen der neun gefilmten Teams dargestellt werden. – Die Abkürzungen „PuB“ und „DGS“ stehen dabei für „Papier-und-Bleistift“ bzw. „Dynamische Geometrie-Software“.

Der Diskussion vorgreifend lässt sich an dieser Stelle schon einmal sagen, dass sich die beiden ausgewählten Aufgaben dadurch auszeichnen, dass die Studierenden auf dem Weg zu einer Lösung verschiedene Vermutungen geäußert haben, welche zu großen Teilen empirisch widerlegt wurden. Dies sollte nach Hadas & Hershkowitz zu kognitiven Konflikten führen. Trotzdem unterscheiden sich die Bearbeitungen in den bei den Lernenden beobachtbaren Unsicherheiten und Zweifeln deutlich voneinander.

6.1 Beobachtungsergebnisse zur Aufgabe „Der kürzeste Weg“

Die Fallunterscheidung (Die Punkte A und B auf verschiedenen bzw. auf derselben Seite von g) wurde von allen neun Gruppen erkannt; der einfache Fall wurde immer richtig gelöst. Den schwierigen Fall haben sechs Gruppen mit der richtigen Vermutung und einer korrekten Begründung abgeschlossen – die Teams Ulap4T-B und Ulap4A sind zu keiner Lösung gekommen, U3TV hat behauptet, der Mittelpunkt der Lotfußpunkte von A und B auf g sei der gesuchte Punkt C_{min}.

Alle vier PuB-Gruppen haben die Fallunterscheidung sofort bzw. sehr schnell erkannt und im ersten Fall sofort die richtige Vermutung geäußert. In den Teams U1TV und U3A wurde allerdings darüber diskutiert, ob es sich bei dem Schnittpunkt der Strecke $\overline{AB}$ mit g wirklich um die Lösung handeln könne, schließlich handele es sich um keinen „Umweg“, wie es der Aufgabentitel fordere.

Bei der Untersuchung des zweiten Falls vermuteten diese vier Gruppen den gesuchten Punkt im „Mittelpunkt der Lotfußpunkte von A und B auf g“. Eine mögliche Erklärung für diese „Mittelpunkt-Intuition“, wie Jiang & McClintock (1997, S. 129 f.) dieses Phänomen genannt haben, äußerte Caro aus dem Team U3A: Der kürzeste Weg von einem Punkt zur Geraden sei der Weg zu seinem Lotfußpunkt, der kürzeste Weg von zwei Punkten zu einer Geraden liege dann vermutlich genau in der Mitte zwischen den beiden Lotfußpunkten. Eine Übersicht über alle geäußerten Vermutungen findet sich in Tab. 1.

Die DGS-Teams hatten mit der Fallunterscheidung bei dieser Aufgabe wesentlich mehr Probleme: Nur Ulap2TV und Ulap4TV-B haben sofort erkannt, dass es zwei Fälle gibt Das Team Ulap2A hat nur den einfachen Fall bearbeitet und sich darüber gewundert, wie einfach die Aufgabe sei, bis sie von ihrer Tutorin einen Tipp bekamen. Die Teams Ulap4TV-A und Ulap4A haben direkt mit dem Bearbeitung des Falls „verschiedene Seiten von g“ begonnen und wurden während der Bearbeitung von ihrer Tutorin auf die Existenz des einfachen Falls hingewiesen. Beide Gruppen haben sich dann auf die Technik verlassen und als einzige den einfach Fall nicht durch „scharfes Hinschauen“ lösen können, sondern den gesuchten Punkt durch Ziehen und Schauen auf die

Messwerte ermittelt. Die Studentinnen des Teams Ulap4TV-A haben sogar aufgeschrieben, die Strecke sei minimal, wenn der Winkel $\angle ACB$ 180° betrage.

Bei der Bearbeitung des zweiten Falls wurden von den Studierenden verschiedene Vermutungen geäußert (vgl. Tabelle 1), die nach dem Anfertigen einer entsprechenden Messung[9] mithilfe der DGS schnell widerlegt werden konnten.

Vermutungen – "Der kürzeste Umweg"	**Teams – PuB**	**Teams – DGS**
C_{min} ist der Mittelpunkt der Lotfußpunkte von A und B auf g.	U1TV, U1A, U3TV, U3A	Ulap2A
Spiegelung von B an g; C_{min} ist Schnittpunkt der Strecke $\overline{AB'}$ mit g.	U1TV, U1A, U3A	Ulap2TV, Ulap2A, Ulap4TV-A
C_{min} ist Lotfußpunkt von A auf g.	U1TV	Ulap4A
C_{min} ist Lotfußpunkt des Mittelpunkts der Strecke $\overline{AB}$ auf g.	U1TV	Ulap4TV-B
C_{min} ist Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ mit g.	U3A	Ulap4TV-B, Ulap4A
Weglänge $\overline{ACB}$ für alle Punkte C in einem bestimmten Bereich gleich lang.	U3TV	Ulap2TV, Ulap2A
C so wählen, dass g Tangente an den Umkreis des Dreiecks ΔABC bildet.	---	Ulap4TV-A, Ulap4A
Weglänge minimal, wenn Winkel $\angle ACB = 90°$.	---	Ulap2TV, Ulap4A
Weglänge minimal, wenn Winkel $\angle ACB$ einen bestimmten Wert annimmt (81°).	---	Ulap2TV
Drehung von B um seinen Lotfußpunkt um 180°; C_{min} ist Schnittpunkt der Strecke $\overline{AB'}$ mit g.	---	Ulap2A

Tab. 1: Vermutungen zur Aufgabe „Der kürzeste Umweg“

Anzeichen von *Verunsicherungen* zeigten bei dieser Aufgabe zwei von neun Gruppen (beide wegen Messungenauigkeiten): Beim Team U1A (Umweg) misst Sven bei der Überprüfung der „Spiegel-Vermutung“ einen kürzeren Streckenzug, wenn C auf dem Mittelpunkt der Lotfußpunkte liegt. Dies verwundert die anderen Gruppenmitglieder, da sie von der Richtigkeit der „Spiegel-Vermutung“ ausgegangen sind. Sie vertrauen ihren Überlegungen, verwerfen diese Messung und fertigen eine genauere Skizze an. Anschließend begründen sie die „Spiegel-Vermutung“.

Etwas Vergleichbares geschah beim Team U1TV (Umweg): Carsten hatte die Vermutung „Spiegelung von B an g“ geäußert und dabei behauptet, man könne die Lösung damit auf den einfachen Fall zurückführen. Die anderen sind von seiner Idee

[9] Es ist anzumerken, dass es sich bei der Umweg-Aufgabe um die erste Präsenzaufgabe des Semesters handelte und die Studierenden mit der Handhabung der Software teilweise noch unerfahren waren.

noch nicht überzeugt und Alice vergleicht seine Idee mit der vorher aufgestellten Vermutung „Lotfußpunkt des Mittelpunkts der Strecke $\overline{AB}$“:

23:23	Alice	Aber, ähm (.) Sina? Das soll ja jetzt das Kürzeste sein *[zeigt auf das Heft von Sina]*
23:32	Sina	ja
23:34	Alice	aber, jetzt hab ich das noch mal so gemacht, wie sie das vorhin sagte *[zeigt auf Dana]* und da ist das bei mir kürzer.
23:39	Sina	hab ich ja eben auch gedacht, aber ich hatte mich vermessen
23:43	Alice	ja, aber ich hatte mich nicht vermessen *[legt das Geodreieck an]* acht komma
23:52	Sina	da muss aber irgendwas *(unverständlich)*. Du misst doch gerade die Spiegelung.
23:55	Alice	ja. Und das Andere ist dieser kleine Punkt hier *[zeigt auf ihre Skizze]* (..) drei komma fünf
24:04	Sina	hmm
24:08	Alice	und fünf. Okay, ist gleich lang
24:12	Sina	ist gleich lang, obwohl die Punkte nicht auf einer Höhe liegen?
24:15	Alic	ja, ich hatte das hier
[...]		
		Carsten und Alice messen in ihren Zeichnungen
24:30	Dana	hmm (.) ja, was denn nun?
24:36	Sina	ist unser Beweis gleich widerlegt, hehe
24:40	Dana	also ich würd ja auch, Sinn macht das nur, wenn du ne Strecke hast und hier hinten Lot auf die Gerade. Normal wird das doch so gemacht. (.) Und dann müsste da der kürzeste Weg nach da
24:58	Alice	Also bei mir ist das gleich lang (..) aber vielleicht

Dann beginnen alle vier zu messen. – In dieser Phase der Verunsicherung wird von Sina und Dana vorgeschlagen, die (korrekte) „Spiegel-Vermutung“ zu verwerfen. Kurz darauf gesteht Alice, ungenau gezeichnet zu haben:

26:38	Alice	Aber irgendwie ist das voll ungenau bei mir. Ich glaub, das Andere ist jetzt doch wieder kürzer
26:44	Sina	*[lacht]* hast du's, guck mal! Hast du von A und B den Mittelpunkt gemacht, hast du's dann senkrecht
26:52	Alice	ja, ja (..) ich konstruier das jetzt einfach mit dem Zirkel, damit das auch stimmt.

Letztendlich behält das Team die „Spiegel-Vermutung“ bei. Direkt im Anschluss an diese Verunsicherung konnte aufkommendes *Beweisbedürfnis* identifiziert werden:

27:04	Dana	aber warum ist das gespiegelt kürzer?
27:10	Carsten	das ist ne gute Frage
27:14	Sina	aber das war doch, was du eben, weil du meintest
27:16	Carsten	auf der anderen Seite hast du sowieso das Kürzeste. Aber warum ist das?#
27:17	Sina	#weil das gespiegelte A, ähm, ja
27:22	Dana	warum ist das gespiegelte A kürzer? Das ist ja jetzt eindeutig, aber [lacht]

Alle vier messen in ihren Zeichnungen

[...]

29:00 Aber ich weiß trotzdem nicht, wieso.

Hierbei handelte es sich allerdings um das einzige der neun Teams, die an der Umweg-Aufgabe gearbeitet haben, bei denen so deutlich ein Beweisbedürfnis zu sehen war. Die anderen Teams ohne DGS sind (mit Ausnahme des Teams U3TV, das die korrekte Vermutung gar nicht geäußert hat) durch das Zurückführen auf den einfach Fall zu ihrer Lösung gekommen und hatten damit gleichzeitig auch eine Begründung – also kein Bedürfnis mehr, nach einer solchen zu suchen.

Bei den Gruppen mit DGS haben (leider) die Tutoren etwas stärker eingegriffen und durch Tipps wie „beide Fälle in einer Zeichnung betrachten“ vermutlich dafür gesorgt, dass die Teams – für das Aufkommen von Beweisbedürfnis – „zu schnell“ zu einer begründeten Lösung gekommen sind.

6.2 Beobachtungsreihe zur Aufgabe „Drei-Stände-Problem“

Alle neun Teams haben während ihrer Arbeit an dieser Aufgabe die Ähnlichkeit zur vorangegangenen Präsenzaufgabe, der „Flughafen-Aufgabe“ konstatiert und sich teilweise darauf bezogen. In der Flughafen-Aufgabe wurde der Punkt mit der minimalen Abstandssumme zu den Eckpunkten eines beliebigen Dreiecks gesucht – der „Fermatpunkt“ des Dreiecks.

Als erste Vermutung äußerten alle neun Teams, der gesuchte Punkt liege im Inkreis-Mittelpunkt. Die abschließende Vermutung aller Teams lautete (korrekt) „die Abstandssumme ist für alle Punkte des Dreiecks gleich groß“, wobei kein Team dies (ohne starke Hilfe von den TutorInnen) korrekt begründen konnte.

Interessant ist hier der Unterschied zwischen den PuB- und den DGS-Studierenden: Während bei letzteren mithilfe der Software empirisch recht schnell die korrekte Vermutung geäußert wurde, hatten die Teams ohne Computerunterstützung weitere Ideen, wo die gesuchten Punkte zu finden sein könnten (siehe Tabelle 2, Transkriptbeispiele für diese Vermutungen finden sich in Abschnitt 5.1).

Vermutungen – "Drei-Strände-Problem"	**Teams – PuB**	**Teams – DGS**
Inkreis-Mittelpunkt.	U1TV, U1C, U3TV, U3A	Ulap2A, Ulap2C, Ulap4A
Abstandssumme minimal in allen Punkten der Winkelhalbierenden.	U1C, U3TV	Ulap2A ("Winkelhalbierende = Mittelsenkrechte")
Abstandssumme minimal in den Eckpunkten.	U1TV, U1C	---
Abstandssumme für alle Punkte gleich groß.	U1TV, U1C, U3TV,U3A	Ulap2A, Ulap2C, Ulap4TV-A, Ulap4TV-B, Ulap4A

Tab. 2: Vermutungen zur Aufgabe „Drei-Strände-Problem“

Anzeichen von *Verunsicherung* zeigten sieben von neun Teams, alle außer U3TV und U3A. Jedes Mal war der Auslöser dieser Unsicherheiten die Feststellung, dass es anscheinend mehrere Punkte mit minimaler Abstandssumme gebe. (Die Transkriptausschnitte der Gruppen U1C und Ulap4A finden sich in Abschnitt 5.2.)

Bei den Teams, die ohne Rechnerunterstützung gearbeitet haben, waren die Feststellungen, die zu Verunsicherung geführt haben, entsprechend vorsichtig – es gebe mehrere Punkte mit derselben Abstandssumme (U1TV) bzw. die Abstandssumme sei im Mittelpunkt, den Eckpunkten und auf den Winkelhalbierenden gleich (U1C).

Von den Teams mit DGS hat Ulap2A zunächst – wie die Gruppen in der Papier-und-Bleistift-Umgebung – die Abstandssumme einzelner Punkte bestimmt. Bei 15:40 stellen Anita und Wanja fest, dass der Inkreis-Mittelpunkt und die Eckpunkte dieselbe Abstandssumme besitzen. Wanja sagt laut „ups", alle lachen und schauen danach etwa zehn Sekunden lang schweigend auf den Bildschirm, bis Anita vorschlägt, die Abstandssumme weiterer Punkte zu bestimmen. Später im Prozess, nachdem die drei Studentinnen eine dynamische Messung konstruiert haben, bemerken sie die Konstanz der Messwerte, woraufhin Wanja zunächst fragt, ob die Konstruktion korrekt sei und anschließend Rundungsfehler vermutet (24:00): „Dann hat der [das Programm] das wohl gerundet." Erst etwa eine Minute später sieht Wanja ein (25:06): „Dann ist das wohl wirklich egal, wo sie ihr Haus baut."

Die übrigen DGS-Teams haben früher als Ulap2A die Möglichkeit einer dynamischen Messung genutzt und „stolpern" entsprechend über die folgenden Erkenntnisse: die Abstandssumme sei für alle Punkte gleich (Ulap2C, Ulap4TV-A und Ulap4TV-B) bzw. die Abstandssumme ändere sich nicht (Ulap4A, s.o.).

Beweisbedürfnis konnte bei vier der neun gefilmten Teams identifiziert werden (die entsprechenden Stellen der Prozesse von U1C und Ulap4A sind in Abschnitt 5.3 nachzulesen): Während bei U1C und Ulap4A die Frage nach einer Begründung eher extrinsisch motiviert zu sein scheint (s.o.), kann man das Beweisbedürfnis in den Gruppen U3A und Ulap2A auch intrinsisch interpretieren. Kerstin vom Team Ulap2A fragt beispielsweise (25:50): „Warum ist das so?" Später im Prozess wiederholt sie sehr energisch (49:15): „Da waren wir doch schon! Aber warum!"

7 Diskussion

Im Folgenden wird zunächst auf das Setting eingegangen, bevor die Forschungsfragen aus Abschnitt 4 diskutiert und weitergehende Überlegungen geäußert werden.

7.1 Diskussion des vorgestellten Settings

Die Studierenden des vorgestellten Forschungsprojekts waren explorierend tätig, sie wurden von den Aufgaben dazu angeregt, *Vermutungen* aufzustellen und diese anschließend zu überprüfen. Allein dies ist, wenn man an die Aussagen von Polya, Reid, u.a. denkt (vgl. Abschnitt 2.1), ein schönes Ergebnis. Die herausgearbeiteten Listen der Vermutungen erheben natürlich keinen Anspruch auf Vollständigkeit,[10]

[10] Wir haben das Umweg-Problem auch Studierenden aus Hannover präsentiert. Aus der hannoveraner

geben aber einen recht guten Überblick über den Suchraum, in dem sich Studierende bei der Arbeit an diesen Problemen bewegen. Insgesamt scheint das Umweg-Problem mehr verschiedene Vermutungen zuzulassen als die Strände-Aufgabe.

Anzeichen von *Verunsicherung* konnten bei Prozessen beider Aufgaben festgestellt werden, hier allerdings deutlich mehr bei der Strände- als bei der Umweg-Aufgabe.

Die Frage, ob die Verunsicherungen tatsächlich *Beweisbedürfnis* auslösen, lässt sich mit den vorliegenden Daten nicht eindeutig beantworten. Zwar konnte an einigen Stellen tatsächlich so etwas wie „Ich will jetzt wissen, warum das so ist!“ beobachtet werden, aber längst nicht in dem Ausmaß, wie Verunsicherungen im Material kodiert werden konnten. Dies kann natürlich mehrere Ursachen haben: Zum einen wird nicht jede Verunsicherung direkt ein Bedürfnis nach mathematisch stringenten Argumentationen auslösen – was aber auch niemand behauptet hat (generell zeigen Lernende von sich aus selten Beweisbedürfnis, vgl. Abschnitt 2.3). Zum anderen ist das Setting, in dem die Daten aufgenommen wurden, vermutlich nicht ideal, um Beweisbedürfnis zu identifizieren. Die Studierenden wussten, dass sie mathematisch begründete Lösungen abgeben sollten, um Bonuspunkte für die Klausur am Ende des Semesters zu sammeln. Eine wünschenswerte intrinsische Beweismotivation wurde also vermutlich von einer extrinsischen überlagert, wofür Aussagen sprechen wie „jetzt müssen wir das noch begründen“ (Tanja, 24:30, U1C, Strände). In Übereinstimmung mit der These von Hadas & Hershkowitz (siehe Abschnitt 1.1) konnten aber bei der Strände-Aufgabe sowohl mehr Stellen mit Verunsicherungen[11] als auch mit Beweisbedürfnis[12] identifiziert werden als bei der Umweg-Aufgabe (vgl. Abschnitt 7.3).

Vermutlich haben auch die Tutoren dazu beigetragen, dass wenig Beweisbedürfnis identifiziert werden konnte. Kein Tutor hat einem Team die Begründung einer Aufgabe direkt verraten, es gab aber Tipps wie „euer Ansatz sieht gut aus“. Einen ebenfalls nicht unbedingt wünschenswerten Einfluss hatten die Handlungen der Tutoren auf die Vielfalt der abgegebenen Lösungen, die zu großen Teilen (abgesehen von qualitativen Unterschieden) gleich waren. Den Tutoren war aus ihren Vorbereitungen jeweils nur eine mögliche Lösung der Präsenzaufgaben bekannt; sie konnten also nicht unbedingt auf alle Ideen der Studierenden in gleichem Maße eingehen. Zum Beispiel existiert für das Umweg-Problem auch eine „analytische Lösung“, indem man die Streckenlängen mithilfe des Satzes des Pythagoras ausdrückt und das Minimum der Wegfunktion über die Ableitungen ermittelt. Das Team U3TV hat einen entsprechenden Ansatz entwickelt, kam aber aufgrund eines kleinen Fehlers im Ansatz nicht zu einer Lösung. Hätte die Tutorin ihnen zu dem eingeschlagenen Lösungsweg konkrete Rückmeldungen geben können, hätte das Team seinen Ansatz evtl. zu Ende führen können. Man sieht, dass die Tutoren – mit entsprechender Vorbereitung (Anregungen hierzu liefern z.B. Polya 1949 und Zech 2002, S. 315 ff.) – viel zur Lernumgebung beitragen

—

Population haben mehrere Teams die Vermutung geäußert, C_{min} liege im Schnittpunkt der Geraden *g* mit dem Kreis um den Mittelpunkt der Strecke *AB* mit Durchmesser |*AB*| – ohne zu bemerken, dass sich Kreis und Gerade nur in Ausnahmefällen in genau einem Punkt schneiden bzw. berühren.

[11] Sieben Teams mit Anzeichen von Verunsicherungen beim Strände-Problem im Vergleich zu zwei Teams bei der Umweg-Aufgabe (siehe Abschnitt 6.1 bzw. 6.2).

[12] Vier Stellen mit Beweisbedürfnis beim Strände-Problem im Vergleich zu einer Stelle beim Umweg-Problem (siehe Abschnitt 6.1 bzw. 6.2).

können. Im Sinne der Forschung wäre vielleicht sogar noch weniger bis gar keine Einflussnahme durch Tutoren wünschenswert. Hier muss man aber abwägen, inwiefern die Studierenden gefördert werden sollen und wie viel Raum die (Labor-) Forschung einnehmen darf.

7.2 Allgemeine Diskussion

Von den Beobachtungsergebnissen ist meiner Meinung nach das folgende besonders interessant: Die zwei untersuchten Aufgaben sind sich auf den ersten Blick relativ ähnlich, beide gehören in das Gebiet der Elementargeometrie und bei beiden geht es um die Minimierung von Streckenlängen. Sowohl das Umweg- als auch das Strände-Problem zeichnen sich dadurch aus, dass die Studierenden auf dem Weg zu einer Lösung verschiedene Vermutungen geäußert und zu großen Teilen empirisch widerlegt haben. Dies sollte nach Hadas & Hershkowitz (2002) zu kognitiven Konflikten und Beweisbedürfnis führen. In dieser Hinsicht unterscheiden sich die Bearbeitungen der beiden Aufgaben aber deutlich voneinander – beim Strände-Problem konnten sowohl (wesentlich) mehr Verunsicherungen als auch mehr Anzeichen für Beweisbedürfnis[13] bei den Lernenden identifiziert werden als beim Umweg-Problem.

Bei der Bearbeitung des Strände-Problems gingen alle Studierenden zunächst davon aus, dass es genau einen Punkt im Dreieck geben müsse, in dem die Abstandssumme minimal sei. Die Verunsicherungen traten ein, als diese Vermutung widerlegt wurde und die Problemlöser feststellten, das mehrere (alle) Punkte dieselbe Abstandssumme besitzen. Bei der Aufgabe „Der kürzeste Umweg“ vermuteten die Lernenden ebenfalls, dass es einen Punkt auf der Geraden gebe, in dem die Länge des Streckenzuges minimal ist. Wenn diese Vermutung für einen spezifischen Punkt widerlegt wurde und sich herausstelle, dass es sich bei der Lösung um einen anderen Punkt handelte, konnten keine Verunsicherungen festgestellt werden. – Zu Verunsicherungen kam es bei dieser Aufgabe nur, wenn die als korrekt angenommene „Spiegel-Vermutung“ durch (ungenaue) Messwerte in Zweifel gezogen wurde.

Als Erklärung für diese Beobachtung lässt sich die Theorie von Berlyne (s.o.) heranziehen, wenn man annimmt, dass die kognitiven Konflikte, die durch die widerlegten Vermutungen erzeugt wurden, von unterschiedlicher Stärke waren. Nun stellt sich allerdings die Frage, was die Vermutungen in den beobachteten Prozessen unterscheidet. Hierzu möchte ich folgenden Vorschlag abgeben:

Allgemeine und konkrete Vermutungen

Die von den Lernenden geäußerten Vermutungen besitzen – in Abhängigkeit von der Aufgabenstellung – unterschiedliche „Reichweiten“. Beim Strände-Problem gehen die Studierenden zunächst davon aus, die Lösungsmenge der Aufgabe bestehe aus genau einem Punkt, was sich als falsch herausstellt, da die Lösungsmenge unendlich viele Punkte enthält. Auch beim Umweg-Problem gehen die Lernenden von einer einelementigen Lösungsmenge aus und konkretisieren dies in verschiedenen Schnitt- und Mittelpunkten. Während die Konkretisierungen teilweise widerlegt und verworfen wurden, war die Annahme bezüglich der Lösungsmenge von Anfang an korrekt – es gibt genau einen Punkt, in dem die Länge des Streckenzuges ihr Minimum annimmt.

[13] Wobei es insgesamt eher wenig Anzeichen für Beweisbedürfnis gibt, siehe Abschnitt 7.1.

Diese Tatsache legt folgende Unterscheidung nahe: Es gibt zwei unterschiedliche Arten von Vermutungen, die ich im Folgenden als „allgemeine“ und „konkrete Vermutungen“ bezeichnen möchte. „Allgemeine Vermutungen“ sind dabei Annahmen, die sich auf die generelle Lösbarkeit einer Aufgabe beziehen, zum Beispiel „die Lösungsmenge des betrachteten Problems besteht aus genau einem Punkt“ bzw. „es gibt mehrere Punkte, die zur Lösungsmenge gehören“. Mit „konkreten Vermutungen“ sind im Gegensatz dazu spezielle Annahmen bezüglich der Lösung einer Aufgabe gemeint, denen immer eine „allgemeine Vermutung“ (bewusst oder unbewusst) zugrunde liegt. Ein Beispiel hierfür wäre „der gesuchte Punkt ist dieser oder jener“ – unter der Annahme, dass die Lösungsmenge aus genau einem Punkt besteht.

Mit der eingeführten Unterteilung in „allgemeine“ und „konkrete Vermutungen“ deuten die Ergebnisse der empirischen Analyse also darauf hin, dass sich Widersprüche zu „allgemeinen Vermutungen“ eher bzw. stärker in Verunsicherungen äußern als Widersprüche zu „konkreten Vermutungen“. Stützen möchte ich meine These mit den folgenden Beobachtungen: Bei der Auswertung der Daten aus der Begleitforschung von Knipping (2005) habe ich noch ein weiteres Problem, bei dem es um die Minimierung eines Streckenzuges ging, ausgewertet – das sogenannte „Brücken- Problem“ (vgl. Engelhaupt 2005; Jiang & McClintock 1997). Wie beim Umweg-Problem gingen die Probanden von der Existenz einer eindeutigen Lösung aus, was sich als korrekt herausstellte. In den neun untersuchten Prozessen konnte nur eine einzige Verunsicherung kodiert werden. Im Gegensatz dazu bedienen die Aufgaben, die Hadas et al. anführen, wenn es um das Auslösen kognitiver Konflikte geht, eher „allgemeine Vermutungen“, die die generelle Lösbarkeit der jeweiligen Aufgabe betreffen: Zum einen das oben geschilderte Problem der drei Winkel über der Strecke *AC* (Hadas & Hershkowitz 2002). Und zum anderen die Untersuchung der Innen- und Außenwinkelsumme von n-Ecken (Hadas, Hershkowitz & Schwarz 2000). Bei der „Winkel-Aufgabe“ gingen die Probanden davon aus, dass es immer oder zumindest manchmal gelingen könne, drei Winkel gleicher Größe zu erhalten; bei der Untersuchung der Außenwinkel wurde fälschlicherweise angenommen, deren Summe würde mit steigender Anzahl der Ecken zunehmen.

Einfluss der Aufgabenstellung

Wenn man nach geometrischen Aufgabenstellungen sucht, die bei Lernenden Überraschungen und Verunsicherungen auslösen können, scheint es also ratsam, unterschiedliche „Reichweiten“ möglicher Vermutungen in die Auswahl einzubeziehen. Einen großen Einfluss auf mögliche kognitive Konflikte bei den Lernenden hat aber natürlich auch die konkrete Formulierung der jeweiligen Aufgabe. Bei Hölzl (1999) findet sich das Strände-Problem (nicht unter diesem Namen) folgendermaßen:

> „Zeichne ein gleichseitiges Dreieck. Lege einen Punkt beliebig in das Innere des Dreiecks und miß die Abstände x, y, z zu den Seiten des Dreiecks, siehe Abbildung. Was kannst du über die Summe $x + y + z$ feststellen? Welchen Zusammenhang gibt es zu anderen Größen des Dreiecks?“ (Hölzl 1999, S. 21)

Hölzls SchülerInnen arbeiteten mit DGS. Ich vermute, dass durch diesen Arbeitsauftrag die Überraschung über die konstante Abstandssumme nicht so groß war wie in der hier geschilderten Studie. Die Lernenden wurden nicht aufgefordert, zunächst über die

Aufgabe nachzudenken oder Vermutungen zu äußern, sondern begannen direkt mit einer (dynamischen) Messung. Noch weniger Verunsicherungen sind zu erwarten, wenn die Aufgabenstellung die Überraschung direkt vorwegnimmt:

> „[Zeige!] Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck. Die Summe der Abstände von den Dreiecksseiten ist für beliebige Punkte P immer gleich." (Tietze, Klika & Wolpers 2000, S. 102)

Letztere Aufgabe wurde natürlich aus einem ganz anderen Zweck gestellt, insofern ist ein Vergleich der Formulierungen unter dem Aspekt des Verunsicherung-Auslösens vielleicht nicht ganz „fair". Es geht mir hier allerdings um das Spektrum möglicher Arbeitsaufträge. Wenn eine Aufgabe Lernende dazu anregen soll, Vermutungen zu äußern und zu überprüfen, und dabei kognitive Konflikte auslösen können soll, sollte sie möglichst offen formuliert sein und möglichst wenig vom Ergebnis vorwegnehmen. Ich plädiere dafür, Lernende dazu aufzufordern, zunächst Vermutungen aufstellen zu lassen, bevor konkrete Messaufträge gegeben werden.

Andererseits könnte man nun aber auch argumentieren, dass es „unfair" sei, die Studierenden bei der Strände-Aufgabe absichtlich auf eine falsche Fährte zu locken. In der Aufgabenformulierung wird explizit von einem Punkt gesprochen – was sich als falsch herausstellt. Zugespitzt wird dies in der Begleitforschung zusätzlich noch durch die Teilaufgabe a), in der die Studierenden vor dem Strände-Problem den Punkt suchen sollten, der von allen Seiten des Dreiecks gleich weit entfernt sei. So wurde die Aufmerksamkeit noch stärker auf einen Punkt, den Inkreismittelpunkt, gelenkt. In fast allen Teams konnte ein Dialog wie der folgende von Ulap4A beobachtet werden:

07:23	Doro	*[liest Aufgabenstellung vor]* Wo sollte sie ihr Haus bauen, dass die Summe der Entfernung von ihrem Haus zu allen drei Stränden minimal ist? (...) Ist doch von allen drei Stränden gleich weit.
07:33	Jan	Ist doch das selbe, oder nicht?#
07:35	Doro	#Ist doch das gleiche, genau#
07:37	Jan	#Ich seh den Unterschied nicht

Die Diskussion, ob dieses Vorgehen „unlauter" oder „unfair" ist, möchte ich hier gar nicht führen; es hat in diesem Fall aber seinen Zweck erfüllt und für zusätzliche Verunsicherungen gesorgt. Einen vergleichbaren Kniff haben übrigens auch Hadas, Hershkowitz & Schwarz (2001, S. 132) angewendet: Bevor die Schüler die (konstante) Außenwinkelsumme von n-Ecken untersuchen sollten, wurden sie zuerst nach der (mit n steigenden) Innenwinkelsumme der n-Ecke gefragt.

Dass das leicht erhöhte Vorkommen von als „Beweisbedürfnis" kodiertem Verhalten bei der Strände-Aufgabe auf die Verunsicherungen zurückzuführen ist, lässt sich aufgrund der Literatur vermuten (vgl. die Abschnitte 2.2 und 2.3), aber nicht nachweisen. Hierzu bedarf es weiterer Untersuchungen, evtl. mit einem verändertem Setting, das das Auftreten von Beweisbedürfnis besser erfassen lässt (vgl. Abschnitt 7.1).

7.3 Ausblick

Ich möchte an dieser Stelle zunächst festhalten, dass im Mathematikunterricht natürlich auch geschlossene bzw. Routine-Aufgaben ihren Platz haben sollen. – Es sollten aber auch immer wieder offene Lerngelegenheiten angeboten werden, in denen Lernende zum Äußern und Testen von Vermutungen angeregt werden und in denen sie auf kognitive Konflikte stoßen können. Eine Frage, die sich an die hier vorgestellten Überlegungen anschließen sollte, betrifft die Übertragbarkeit auf andere mathematische Gebiete und andere Zielgruppen. Inwieweit lassen sich zum Beispiel aus den Bereichen Algebra oder Zahlentheorie bestimmte Zahlenrätsel finden, die – aufgrund unterschiedlicher „Reichweiten“ in möglichen Vermutungen über die Lösbarkeit – bei Lernenden zu kognitiven Konflikten und darüber zu gesteigerter Motivation führen? In den Sinn kommen hier natürlich die unlösbaren Aufgaben aus den Bereichen Arithmetik, Geometrie oder Kombinatorik, die in der Arbeitsgruppe von Martin Stein betrachtet werden (vgl. Stein 1999; Burchartz & Stein 1998). Auch bei den dort gestellten Aufgaben stoßen die Lernenden auf eine Diskrepanz zwischen ihren Erwartungen und der tatsächlichen (leeren) Lösungsmenge (vgl. Abschnitt 2.2).

Die Frage nach der Motivation ist generell spannend: Wie kann es gelingen, intrinsische Motivation zu erzeugen? Wann schlägt Beweisbedürfnis in Frustration um? Und welche Rolle spielt das mathematische Vorwissen in diesem Prozess? Weiter untersucht werden sollten der auch Einfluss der Software (DGS – vielleicht auch CAS – vs. PuB). Hier gibt es auf jeden Fall Ansatzpunkte zu weiterer Forschung – sowohl mit Studierenden als auch mit SchülerInnen.

Anhang

Verwendete Transkriptionsregeln (für diesen Artikel vereinfacht):

Zeichen	Bedeutung
(.) (..) (...) (4sec)	kurze Pause (1 Sekunde) mittlere Pause (länger als 1 Sekunde, maximal 2 Sekunden) längere Pause (länger als 2 Sekunden, maximal 3 Sekunden) lange Pause (Dauer angegeben)
(Wort)	das in Klammern stehende Wort ist in der Aufzeichnung undeutlich und könnte falsch verstanden worden sein
(*unverständlich*)	die Äußerung konnte nicht transkribiert werden
#	am Ende einer Äußerung: jemand wird unterbrochen am Anfang einer Äußerung: jemand unterbricht den Vorredner
[Handlung] / *[Geräusch]*	Handlungen wie „*[zeigt auf etwas]*“ und Geräusche wie "*[lacht]*", "*[räuspert sich]*", „*[hustet]*“ etc. werden in eckige Klammern und kursiv gesetzt

Literatur

Adey, Philip S. & Shayer, Michael (1994): Really raising standards: Cognitive intervention and academic achievement. London: Routledge.

Bellemain, Franck & Laborde, Jean-Marie (1994). Cabri Géométre II, version 1.0 MS-DOS et Macintosh, Texas-Instruments, Dallas

BLK (1997) Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung (Hrsg.): Gutachten zur Vorbereitung des Programms „Steigerung der Effizienz des mathematischnaturwissenschaftlichen Unterrichts“. Materialien zur Bildungsplanung und Forschungsförderung, Heft 60. Bonn. url (10.10.2010): http://www.blkbonn.de/papers/heft60.pdf

Blömeke, Sigrid; Risse, Jana; Müller, Christiane; Eichler, Dana & Schulz, Wolfgang (2006): Analyse der Qualität von Aufgaben aus didaktischer und fachlicher Sicht. Ein allgemeines Modell und seine exemplarische Umsetzung im Unterrichtsfach Mathematik. In: Unterrichtswissenschaft, 34 (4), S. 330 – 357.

Büchter, Andreas & Leuders, Timo (2005): Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Burchartz, Birgit & Stein, Martin (1998): Problemlöseprozesse bei Aufgaben mit nicht erreichbarer Zielsetzung. In: mathematica didactica 21 (1998), Bd. 1. S. 21 – 44.

De Villiers, Michael (1990): The role and function of proof in mathematics. In: Pythagoras 24, S. 17 – 24.

De Villiers, Michael (2000): Learners' Needs for Conviction and Explanation within the Context of Dynamic Geometry. In: Pythagoras, 52, S. 20 – 23.

Deulofeu, Jordi & Figueiras, Lourdes (2005): Visualising and Conjecturing Solutions for Heron's Problem. In: CERME 4 Tagungsband.

Dörner, Dietrich (1979): Problemlösen als Informationsverarbeitung. Stuttgart: Kohlhammer. 2. überarbeitete Auflage.

Engelhaupt, Hans (2004): Kürzeste Wege, Teil I. In: Mathematikinformation, 41, Universität Gesamthochschule Kassel. S. 24 – 61.

Engelhaupt, Hans (2005): Kürzeste Wege, Teil II. In: Mathematikinformation, 42, Universität Gesamthochschule Kassel. S. 3 – 30.

Graumann, Günter; Hölzl, Reinhard; Krainer, Konrad; Neubrand, Michael & Struve, Horst (1996). Tendenzen der Geometriedidaktik der letzten 20 Jahre. In: Journal für Mathematik-Didaktik 17 (3/4), S. 163 – 237.

Hadas, Nurit & Hershkowitz, Rina (1998): Proof in geometry as an explanatory and convincing tool. In: Olivier, A & Newstead, K. (Hrsg.): Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Bd. 3. S. 25 – 32.

Hadas, Nurit & Hershkowitz, Rina (1999): The role of uncertainty in constructing and proving in computarized environment. In: Zaslavsky, O. (Hrsg.): Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Bd. 3, S. 57 – 64.

Hadas, Nurit & Hershkowitz, Rina (2002): Activity analyses at the service of task design. In: Cockburn, A. D. & Nardi, E. (Hrsg.): Proceedings of the 26th conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education. Bd. 3. S. 49 – 56.

Hadas, Nurit; Hershkowitz, Rina & Schwarz, Baruch B. (2000): The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. In: Educational Studies in Mathematics, 44. S. 127 – 150.

Hefendehl-Hebeker, Lisa (2003): Erkenntnisgewinn in der Mathematik. In: Leuders, Timo (Hrsg): Mathematik-Didaktik – Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II. Berlin: Cornelsen Scriptor. S. 107 – 118.

Heinrich, Frank (2004): Strategische Flexibilität beim Lösen mathematischer Probleme. (Theoretische Analysen und empirische Erkundungen über das Wechseln von Lösungsanläufen). Hamburg: Verlag Dr. Kovac.

Hölzl, Reinhard (1999): Qualitative Unterrichtsstudien zur Verwendung dynamischer Geometrie-Software. Wißner-Verlag, Augsburg (Habilitationsschrift).

Jahnke, Hans N. (1998): Historische Erfahrungen mit Mathematik. In: Mathematik Lehren, 91.

Jiang, Zhonghong & McClintock, Edwin (1997): Using The Geometer's Sketchpad with Preservice Teachers. In: King, James R. & Schattenschneider, Doris (Hrsg.): Geometry turned on – Dynamic software in learning, teaching, and reasearch. Mathematical Association of America.

Kircher, Ernst; Girwidz, Raimund & Häußler, Peter (2000): Physikdidaktik – Eine Einführung in Theorie und Praxis. Braunschweig: Vieweg.

Knipping, Christine (2005): Dynamisierung einer Lehrveranstaltung durch DGS? In: Graumann, Günther (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2005. Hildesheim: Franzbecker. S. 303 – 306.

Krauthausen, Günter (2001): Wann fängt das Beweisen an? Jedenfalls, ehe es einen Namen hat. In: Weiser, Werner & Wollring, Bernd (Hrsg.): Beiträge zur Didaktik der Mathematik für die Primarstufe. Hamburg: Dr. Kovac. S. 99 – 113.

Lakatos, Imre (1976): Proofs and Refutations. Cambridge: Cambridge University Press.

Leuders, Timo (2003): Problemlösen. In: Leuders, Timo (Hrsg.): Mathematik-Didaktik. Berlin: Cornelsen Scriptor. S. 119 – 135.

Ludwig, Matthias (o.J.): Didaktik der Geometrie – Vorlesungsskript. Kapitel 3: Beweisen und Argumentieren. url (20.03.2011): http://mathematik.ph-weingarten.de/~kleine/didgeo/k3.pdf

Mason, John; Burton, Leone & Stacey, Kaye (2006): Mathematisch denken. Mathematik ist keine Hexerei. München: Oludenbourg Wissenschaftsverlag.

Mason, John & Johnston-Wilder, Sue (2004): Fundamental Constructs in Mathematics Education. Routledge

Maier, Hermann (1991): Interpretative Forschung im Bereich der Mathematikdidaktik. In: Beiträge zum Mathematikunterricht (1991), S. 97 – 107.

Piaget, Jean (1972): Theorien und Methoden der modernen Erziehung. Wien: Fritz Molden.

Polya, George (1949): Schule des Denkens. Tübingen: Francke.

Polya, George (1968): Mathematics and Plausible Reasoning. Band I und II. Princeton, NJ: Princeton University Press. 2. Auflage.

Polya, George (2009/1962): Mathematical Discovery – On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving. Band I und II. New York: Ishi Press.

Reid, David A. (2002): Conjectures and Refutations in Grade 5 Mathematics. In: Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 33., No. 1 (Jan., 2002). S. 5 – 29.

Reid, David A. & Knipping, Christine (2010): Proof in Mathematics Education – Research, Learning and Teaching. SensePublishers.

Rott, Benjamin (2005): Lösungen elementargeometrischer Problemstellungen - Analysen aus mathematischer und empirischer Sicht. Unveröff. Examensarbeit, Universität Oldenburg.

Schoenfeld, Alan H. (1985): Mathematical Problem Solving. Orlando: Academic Press.

Schoenfeld, Alan H. (1994): Reflections on Doing and Teaching Mathematics. In: Schoenfeld, Alan H. (Hrsg.): Mathematical Thinking and Problem Solving. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. S. 53 – 69.

Specht, Eckard (2001): geometria - scientiae atlantis: 300+ Aufgaben zur Geometrie und zu Ungleichungen. Magdeburg: Otto-von-Guericke-Universität.

Spiegel, Hartmut; Ernst, Annette & Schmelter, Anja (1999) Wenn die Rechnung nicht den Tatsachen entspricht: Kognitive Konflikte beim Rechnen mit Nummern am Fallbeispiel "Felix". In: Selter, Christoph & Walther, Gerd (Hrsg.): Mathematikdidaktik als design science – Festschrift für Erich Christian Wittmann. Leipzig: Klett. S. 217 – 225.

Stein, Martin (1999): Elementare Bausteine der Problemlösefähigkeit: logisches Denken und Argumentieren. In: Journal für Mathematik Didaktik, 20 (1999), H. 1. S. 3 – 27.

Tietze, Uwe-Peter; Klika, Manfred & Wolpers, Hans (Hrsg) (2000): Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Band 1. Vieweg, Braunschweig / Wiesbaden, 2. durchgesehene Auflage.

Winter, Heinrich (1983): Zur Problematik des Beweisbedürfnisses. In: Journal für Mathematikdidaktik 4(1), S. 59 – 95.

Winter, Heinrich (1989): Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik. Braunschweig / Wiesbaden: Vieweg-Verlag.

Wittmann, Erich Ch. (1981/1974): Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig: Vieweg. 6. Auflage.

Woolfolk, Anita (2008): Pädagogische Psychologie. München: Pearson Studium. 10. Auflage – bearbeitet und übersetzt von Prof. Dr. Ute Schönpflug

Zech, Friedrich (2002): Grundkurs Mathematikdidaktik. Weinheim und Basel: Beltz. 10. Auflage.

Zimmermann, Bernd (2003): Mathematisches Problemlösen und Heuristik in einem Schulbuch. In: Der Mathematikunterricht, MU 1 – 2003. S. 42 – 57.

Zum Autor

Benjamin Rott
Leibnitz Universität Hannover
Institut für Didaktik der Mathematik und Physik (IDMP)
Welfengarten 1
30167 Hannover

E-Mail: rott@idmp.uni-hannover.de

Zitation

Bitte zitieren Sie diesen Beitrag wie folgt:

Rott, Benjamin (2011). Verunsicherungen und Zweifel beim Testen von Vermutungen bei der Bearbeitung elementargeometrischer Problemaufgaben. In: Schriftenreihe Fachdidaktische Forschung, Nr. 4, Oktober 2011. Online verfügbar: http://www.uni-hildesheim.de/media/fff/Rott_04-2011.pdf.